CHAP 1 : COMPLEMENT DE DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL : REFERENTIELS NON GALILEENS

A. CHANGEMENT DE REFERENTIEL

A.1. Le référentiel

A.1.1.Notion de référentiel

Un référentiel est l'ensemble d'un repère (spatial) lié à un point d'un solide de référence et d'une chronologie dans ce repère.

Ce point peut être fixe ou mobile par rapport à l'observateur. Ce référentiel peut être muni d'un repère orthonormé (cartésien, cylindrique, sphérique).

NB : Ne pas confondre référentiel et repère : on peut calculer la vitesse d'un point par rapport à un référentiel dans deux repères différents.

A.1.2. Différents types de référentiels

A.1.2.1. Référentiel de Copernic ou référentiel sidéral

C'est un référentiel dont l'origine est le centre de masse du système solaire (voisin du centre du soleil). On lui associe un repère appelé repère sidéral dont les axes passent par trois étoiles bien déterminées.

A.1.2.2. Référentiel de Kepler ou héliocentrique

C'est un référentiel dont l'origine est le centre du soleil et les trois sont parallèles à ceux de Copernic

A.1.2.3. Référentiel terrestre

C'est un référentiel dont l'origine est un point de la surface de la terre et les trois axes sont dirigés vers trois étoiles considérées comme fixes.

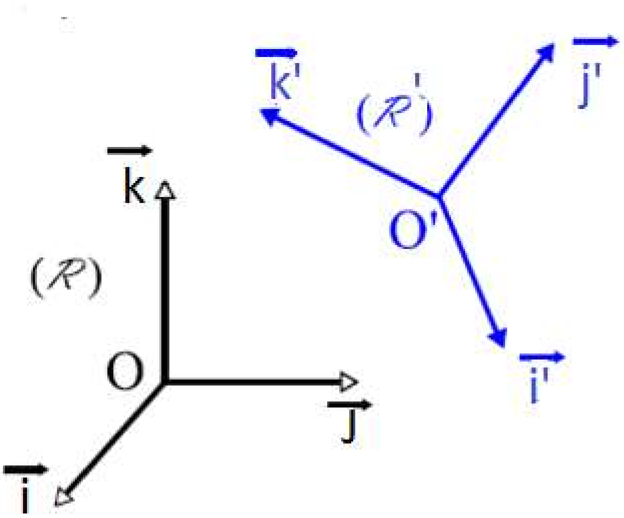
A.1.2.4. Référentiel géocentrique

C'est un référentiel dont l'origine est le centre de la terre et les trois axes sont dirigés vers trois étoiles considérées comme fixes.

A.2. Mouvement d'un référentiel par rapport à un autre dans les cas du mouvement de translation et du mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe.

Considérons deux référentiels en mouvement l'un par rapport à l'autre. On désignera comme fixe, le référentiel $(\mathcal{R}) = \left(O,\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ et donc en mouvement par rapport à $(\mathcal{R})$, le référentiel $(\mathcal{R}') = \left(O',\ \vec{\imath'}, \vec{\jmath'}, \vec{k'}\right)$. Par conséquent $(\mathcal{R})$ est dit référentiel absolu et $(\mathcal{R}')$, référentiel relatif.

Le mouvement du référentiel relatif dans le référentiel absolu se traduit par deux effets : la translation de son origine O et la rotation de son trièdre. Dans le cas général, ces deux mouvements sont simultanés mais nous allons les présenter indépendamment en considérant des cas particuliers.



A.2.1. Cas d'une translation instantanée du référentiel relatif

Le référentiel relatif est en translation par rapport au référentiel absolu lorsque son origine O' est mobile dans $(\mathcal{R})$ mais que l'orientation du trièdre mobile ne varie pas dans le temps.

$$\overrightarrow{O'M} = x'\vec{\imath'} + y'\vec{\jmath'} + z'\vec{k'} \quad \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}|\mathcal{R}' = \frac{dx'}{dt}\vec{\imath'} + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|\mathcal{R} = \frac{dx'}{dt}\vec{\imath'} + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'} + (x'\left.\frac{d\vec{\imath'}}{dt}\right|\mathcal{R} + y'\left.\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}\right|\mathcal{R} + z'\left.\frac{d\vec{k'}}{dt}\right|\mathcal{R})$$

$$\vec{\imath'} = \vec{\jmath'} = \vec{k'} = \overrightarrow{const} \quad donc \quad \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|\mathcal{R} = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|\mathcal{R}'$$

Le mouvement du point matériel O' est caractérisé par son vecteur vitesse instantanée. Ce dernier définit la vitesse de translation du référentiel relatif dans le référentiel absolu, et nous le notons :

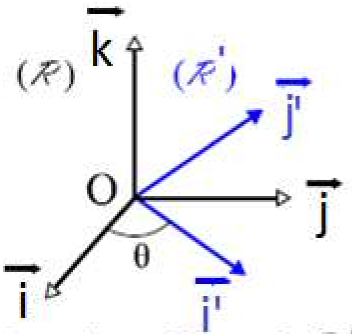
$$\vec{v}_{\mathcal{R}'/\Re} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}|\mathcal{R}$$

Remarquons que ce vecteur n'est pas nécessairement constant dans le temps. Lorsque c'est le cas, on parle de translation uniforme mais dans le cas général, la translation est quelconque.

A.2.2. Cas d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe

Lorsque l'orientation du trièdre $\left(\vec{\imath}',\vec{\jmath}',\vec{k}'\right)$ varie dans le temps, le référentiel relatif est animé d'un mouvement de rotation instantanée par rapport au référentiel absolu.

Nous seront amenés par la suite à exprimer les dérivées par rapport au temps des vecteurs unitaires de $(\mathcal{R}')$ dans $(\mathcal{R})$.



Rotation uniforme de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$

O et O' sont confondus

$$\vec{k} = \vec{k}'$$

$(\Delta) = \left(O,\vec{k}\right)$: axe de rotation

$$\begin{cases} \vec{\imath}' = \vec{\imath}\cos\theta + \vec{\jmath}\sin\theta \\ \vec{\jmath}' = -\vec{\imath}\sin\theta + \vec{\jmath}\cos\theta \\ \vec{k}' = \vec{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\vec{\imath}'}{dt}|\mathcal{R} = \frac{d\theta}{dt}(-\vec{\imath}\sin\theta + \vec{\jmath}\cos\theta) = \vec{\jmath}'\frac{d\theta}{dt} \\ \frac{d\vec{\jmath}'}{dt}|\mathcal{R} = -\frac{d\theta}{dt}(\vec{\imath}\mathrm{co}\theta\mathrm{s} + \vec{\jmath}\sin\theta) = -\vec{\imath}'\frac{d\theta}{dt} \\ \frac{d\vec{k}'}{dt}|\mathcal{R} = \vec{0} \end{cases}$$

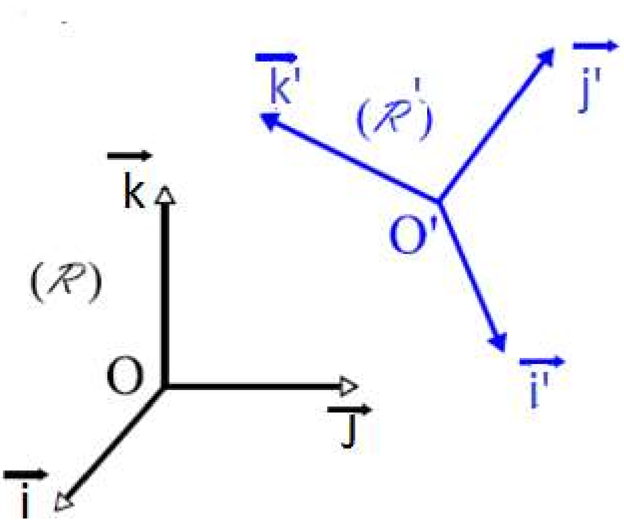
$$\begin{cases} \frac{d\vec{\imath}'}{dt}|\mathcal{R} = \vec{\jmath}'\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{k}\Lambda\vec{\imath}' = \vec{\omega}\Lambda\vec{\imath}' \\ \frac{d\vec{\jmath}'}{dt}|\mathcal{R} = -\vec{\imath}'\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{k}\Lambda\vec{\jmath}' = \vec{\omega}\Lambda\vec{\jmath}' \\ \frac{d\vec{k}'}{dt}|\mathcal{R} = \vec{O} = \vec{\omega}\Lambda\vec{k}' \end{cases}$$

Avec $\boldsymbol{\vec{\omega} = \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \frac{d\theta}{dt}\vec{k} = \dot{\theta}\vec{k}}$: le vecteur rotation du référentiel $(\mathcal{R}')$ par rapport à $(\mathcal{R})$.

A.3. Lois de composition des vitesses et des accélérations dans le cas d'une translation, et dans le cas d'une rotation uniforme autour d'un axe fixe : vitesse d'entraînement, accélérations d'entraînement et de Coriolis.

A.3.1. Lois de composition des vitesses dans le cas d'une translation et d'une rotation uniforme autour d'un axe fixe : vitesse d'entraînement.

Soient deux référentiels $(\mathcal{R})\ et\ (\mathcal{R}')$ en mouvement l'un par rapport à l'autre.



Soit M, un point de coordonnées (x', y', z') dans le référentiel $(\mathcal{R}')$.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OO'} + x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}' + z'\vec{k}'$$

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}'} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}|\mathcal{R}' = \frac{dx'}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'$$

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}|\mathcal{R} = \frac{dx'}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}' + \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}|\mathcal{R} + x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}$$

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}|\mathcal{R} = \frac{dx'}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}' + \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}|\mathcal{R} + \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e = \frac{dx'}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}' + \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}|\mathcal{R} + \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}$$

Avec

$\vec{v}_r = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} = \frac{dx'}{dt}\vec{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\vec{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'$: vitesse relative (Vitesse de M dans $\mathcal{R}'$).

$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}|\mathcal{R} + x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}|\mathcal{R} + \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}$:

vitesse d'entrainement du point M.

$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}|\mathcal{R}' + \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}|\mathcal{R} + \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}$: vitesse absolue (Vitesse de M dans $\mathcal{R}$).

- Si $\vec{\omega} = \vec{0}$ c'est-à-dire $\vec{\imath}' = \vec{\jmath}' = \vec{k}' = \overrightarrow{const}$ alors

  $\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}|\mathcal{R} = \vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathfrak{R}}$: on a un mouvement de translation

- Si $\vec{v}_e = \vec{v}_{O'} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}|\mathcal{R} = \vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathfrak{R}} = \vec{0}$: les points O et O' sont confondus ou immobiles l'un par rapport à l'autre, on a un mouvement de rotation autour d'un axe fixe.

Remarque
On peut établir ces relations ci-dessus en utilisant la formule de dérivation suivant :

$$\boxed{\frac{d\vec{A}}{dt}|\mathcal{R} = \frac{d\vec{A}}{dt}|\mathcal{R}' + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\Lambda\vec{A}}$$

A.3.2. Lois de composition des accélérations dans le cas d'une translation, et dans le cas d'une rotation uniforme autour d'un axe fixe : accélérations d'entraînement et de Coriolis.

L'accélération absolue est notée : $\vec{a}_a = \vec{a}_{M/\mathfrak{R}} = \frac{d\vec{v}_a}{dt}|\mathcal{R}$

$$\vec{a}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\Big|\mathcal{R} + \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)\Big|\mathcal{R} + \frac{d\vec{v}_r}{dt}|\mathcal{R}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)\Big|\mathcal{R} = \vec{\omega}\wedge\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\Big|\mathcal{R} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}|\mathcal{R}\,\Lambda\,\overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{\omega}\wedge\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}|\mathcal{R} = \vec{\omega}\wedge\left(\vec{v}_r + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right) = \vec{\omega}\wedge\vec{v}_r + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M})$$

$$\frac{d\vec{v}_r}{dt}\Big|\mathcal{R} = \frac{d\vec{v}_r}{dt}\Big|\mathcal{R}' + \vec{\omega}\wedge\vec{v}_r$$

D'où :

$$\vec{a}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}|\mathcal{R} + 2\,\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}|\mathcal{R}\,\Lambda\,\overrightarrow{O'M} + \frac{d\vec{v}_r}{dt}|\mathcal{R}'$$

❖ **L'accélération relative**

$$\vec{a}_r = \frac{d\vec{v}_r}{dt}\bigg|\mathcal{R}' = \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}\bigg|\mathcal{R}' = \ddot{x}'\vec{\imath}' + \ddot{y}'\vec{\jmath}' + \ddot{z}'\vec{k}'$$

C'est l'accélération M dans le repèr**e $\mathcal{R}'$.**

❖ **L'accélération d'entrainement**

Elle correspond à l'accélération dans le repère $\mathcal{R}$ d'un point fixe de $\mathcal{R}'$.

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}|\mathcal{R} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}|\mathcal{R}\,\Lambda\,\overrightarrow{O'M}$$

❖ **L'accélération complémentaire ou de Coriolis**

$$\vec{a}_C = 2\,\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$$

En conclusion, on a :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_C$$

B. REFERENTIEL NON GALILEEN

B.1. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE DANS UN REFERENTIEL NON GALILEEN

B.1.1.Référentiel non galiléen

Un référentiel non galiléen est un référentiel en mouvement accéléré par rapport à un référentiel galiléen.

Soit $\mathcal{R}'$ un tel référentiel en mouvement par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}$. La composition des accélérations pour un point matériel en mouvement dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.

$$\boxed{\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_C}$$

B.1.2. Principe fondamental dans un référentiel non galiléen

Soit un point M de masse m.

Dans $\mathcal{R}$ galiléen, principe fondamental de la dynamique :

$$m\ \vec{a}_a = \sum \vec{F} \Longrightarrow m(\vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_C) = \sum \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{P}_{M/\mathcal{R}'}}{dt}|\mathcal{R}' = m\ \vec{a}_r = \sum \vec{F} - m\vec{a}_e - m\ \vec{a}_C$$

$\sum \vec{F}$ **:** Somme des forces qui s'exerce sur le point matériel M dans $\mathcal{R}$ comme dans $\mathcal{R}'$ (invariance des forces en mécanique classique).

Le principe fondamental de la dynamique s'applique aussi dans un référentiel non galiléen avec certaines conditions.

Conclusion

$\mathcal{R}$ galiléen, $m\ \vec{a}_a = \sum \vec{F}$

$\mathcal{R}'$ non galiléen, $m\ \vec{a}_r = \sum \vec{F} + \sum autres\ forces$

Borces d'inerties

$$m\ \vec{a}_r = \sum \vec{F} - m\vec{a}_e - m\ \vec{a}_C = \sum \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{iC}$$

$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e$: force d'inertie d'entrainement

$\vec{F}_{iC} = -m\,\vec{a}_C$: force d'inertie de Coriolis.

Ces forces proportionnelles aux masses sont réalité des forces fictives (ou pseudo-forces) car elles n'existent que dans les référentiels non galiléen.

Le P.F.D s'écrit donc dans un référentiel non galiléen à condition d'ajouter à la somme des forces ordinaire $\sum\vec{F}$ les pseudo-forces d'inerties.

Les pseudo-forces étant liées uniquement aux référentiels non galiléen, on les désigne aussi par force de repère.

B.1.3 Cas particuliers

- Mouvement de translation

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{O} \Rightarrow \vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}|\mathcal{R} = \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} \; et \; \vec{a}_C = \vec{O}$$

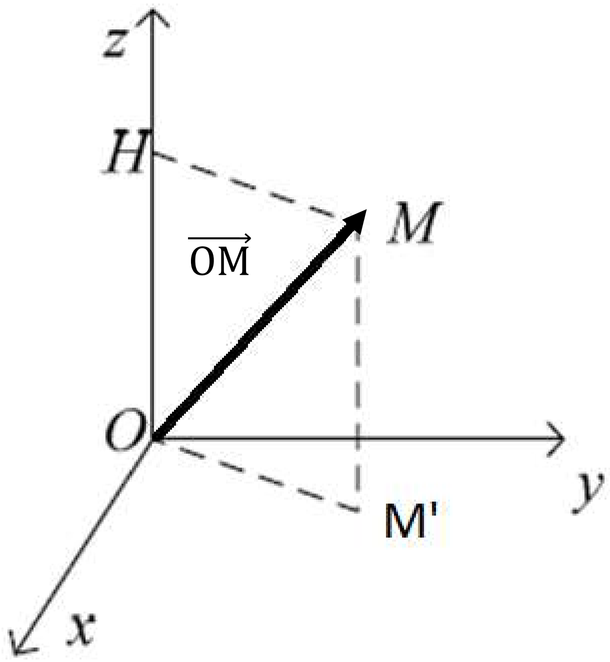
$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e = -m\vec{a}_{O'/\mathcal{R}} \quad \text{et} \; \vec{F}_{iC} = \vec{O}$$

Si $\mathcal{R}'$ est en mouvement de translation uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ alors $\mathcal{R}'$ est galiléen.

$$\vec{a}_e = \vec{a}_C = \vec{O} \quad \Rightarrow \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'}$$

B.1.4. Mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe

$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \overrightarrow{Const}$ si O' coïncide avec O.



Soit H la projection de M

Sur l'axe de rotation.

$$(\Delta) = \left(O, \vec{k}\right)$$

$$\vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$$

$$\vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) = \vec{\omega} \wedge \left[\vec{\omega} \wedge \left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}\right)\right]$$

$$\vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{HM}\right) \; car \; \vec{\omega} || \overrightarrow{OH}$$

Rappel : $\vec{A} \wedge \left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) = \left(A.\vec{C}\right)\vec{B} - \left(A.\vec{B}\right)\vec{C}$

$$\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{HM}\right) = \left(\vec{\omega}\,.\overrightarrow{HM}\right)\vec{\omega} - \omega^2.\overrightarrow{HM} = -\omega^2.\overrightarrow{HM}$$

$$\vec{a}_e = -\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}{}^2.\overrightarrow{HM}$$

$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e = \omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}{}^2.\overrightarrow{HM}$$

$\vec{F}_{ie}$:est une force centrifuge dans ce cas (suivant le vecteur $\overrightarrow{HM}$ et dirigé dans le sens opposé au centre H.

B.1.5.QUELQUES EXEMPLES

Un passager assis dans un autobus observe les effets suivants :

- Si l'autobus accélère, on se sent projeté vers l'arrière ;
- Si l'autobus freine, on se sent projeté vers l'avant ;
- Si l'autobus tourne à gauche, on se sent projeté vers la droite et inversement.

Les effets ressentis dans les trois (3) cas ci-dessus sont dus aux forces d'inertie d'entrainement.

B.2. Théorème du moment cinétique dans un référentiel non galiléen

Soit $\mathcal{R}$, un référentiel d'origine O.

$\mathcal{R}'$, un référentiel non galiléen d'origine O'.

Un point matériel M de masse m et A, un point de $\mathcal{R}'$. Le moment cinétique de M en A dans $\mathcal{R}'$ est :

$$\vec{\boldsymbol{L}}_{A/\mathcal{R}'} = \overrightarrow{\mathbf{AM}} \wedge \mathbf{m}\,\vec{\boldsymbol{V}}_{M/\mathcal{R}'} = \overrightarrow{\mathbf{AM}} \wedge \mathbf{m}\,\vec{\boldsymbol{V}}_{r}$$

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}_{A/\mathcal{R}'}}{dt}/\mathcal{R}' = \frac{d\overrightarrow{\mathbf{AM}}}{dt}/\mathcal{R}' \wedge \mathbf{m}\,\vec{\boldsymbol{V}}_{r} + \overrightarrow{\mathbf{AM}} \wedge \mathbf{m}\,\vec{\boldsymbol{a}}_{M/\mathcal{R}'}$$

$$\frac{d\overrightarrow{\mathbf{AM}}}{dt}/\mathcal{R}' = \frac{d\left(\overrightarrow{\mathbf{AO'}} + \overrightarrow{\mathbf{O'M}}\right)}{dt}/\mathcal{R}' = \frac{d\left(-\overrightarrow{\mathbf{O'A}} + \overrightarrow{\mathbf{O'M}}\right)}{dt}/\mathcal{R}'$$

$$\frac{d\overrightarrow{\mathbf{AM}}}{dt}/\mathcal{R}' = -\vec{\boldsymbol{V}}_{A/\mathcal{R}'} + \vec{\boldsymbol{V}}_{r}$$

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}_{A/\mathcal{R}'}}{dt}/\mathcal{R}' = \left(-\vec{\boldsymbol{V}}_{A/\mathcal{R}'} + \vec{\boldsymbol{V}}_{r}\right) \wedge \mathbf{m}\,\vec{\boldsymbol{V}}_{r} + \overrightarrow{\mathbf{AM}} \wedge \mathbf{m}\,\vec{\boldsymbol{a}}_{M/\mathcal{R}'}$$

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}_{A/\mathcal{R}'}}{dt}/\mathcal{R}' = -\mathrm{m}\vec{\boldsymbol{V}}_{A/\mathcal{R}'} \wedge \vec{\boldsymbol{V}}_{r} + \overrightarrow{\mathbf{AM}} \wedge \left(\sum \vec{\boldsymbol{F}} + \vec{\boldsymbol{F}}_{ie} + \vec{\boldsymbol{F}}_{iC}\right)$$

$$\boxed{\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}_{A/\mathcal{R}'}}{dt}/\mathcal{R} = -\mathrm{m}\vec{\boldsymbol{V}}_{A/\mathcal{R}'} \wedge \vec{\boldsymbol{V}}_{M/\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\mathbf{AM}} \wedge \left(\sum \vec{\boldsymbol{F}} + \vec{\boldsymbol{F}}_{ie} + \vec{\boldsymbol{F}}_{iC}\right)}$$

Si A est fixe dans $\mathcal{R}'$ *alors* $\vec{\boldsymbol{V}}_{A/\mathcal{R}'} = \vec{O}$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{A/\mathcal{R}'}}{dt}/\mathcal{R} = \overrightarrow{\mathbf{AM}} \wedge \left(\sum \vec{\boldsymbol{F}} + \vec{\boldsymbol{F}}_{ie} + \vec{\boldsymbol{F}}_{iC}\right) = \vec{\mathcal{M}}_{\sum \vec{F}/A} + \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{ie}/A} + \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{iC}/A}}$$

Si A est mobile dans $\mathcal{R}'$.

$$\boxed{\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}_{A/\mathcal{R}'}}{dt}/\mathcal{R} + \mathrm{m}\vec{\boldsymbol{V}}_{A/\mathcal{R}'} \Lambda\ \vec{\boldsymbol{V}}_{M/\mathcal{R}'} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\sum\vec{F}/A} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{ie}/A} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{iC}/A}}$$

Conclusion

Dans un référentiel non galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point matériel M en point fixe A de ce référentiel est égale au moment en ce point de la somme des forces ordinaire $\sum\vec{\boldsymbol{F}}$ et des forces d'inertie d'entrainement et de Coriolis.

Si A est mobile, il faut ajouter à la dérivée du moment cinétique, la quantité vectorielle $\mathrm{m}\vec{\boldsymbol{V}}_{A/\mathcal{R}'} \Lambda\ \vec{\boldsymbol{V}}_{M/\mathcal{R}'}$.

B.3. Théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen

L'énergie cinétique : $Ec_{/\mathcal{R}'} = \frac{1}{2}mV_{\mathcal{R}'}^2$

Pour chaque force $\vec{f}$ s'appliquant au point matériel, la puissance est :

$$\mathcal{P}_{/\mathcal{R}'}(\vec{f}) = \vec{f}.\overrightarrow{V_{/\mathcal{R}'}}(M)$$

Dans un référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$, la loi de la puissance cinétique s'écrit :

$$\frac{dEc_{/\mathcal{R}'}(M)}{dt} = \sum \mathcal{P}_{/\mathcal{R}'}(\vec{f}) + \mathcal{P}_{/\mathcal{R}'}(\overrightarrow{f_{ie}})$$

$$\mathcal{P}_{/\mathcal{R}'}(\overrightarrow{f_{ic}}) = \overrightarrow{f_{ic}}.\vec{V}_{/\mathcal{R}'} = 0 \ \ car \ \ \overrightarrow{f_{ic}} \perp \vec{V}_{/\mathcal{R}'}$$

En multipliant cette équation par dt, on obtient le théorème de l'énergie cinétique.

Le théorème de l'énergie cinétique entre deux instants très proches s'écrit :

$$dEc_{/\mathcal{R}'} = \delta W(\overrightarrow{f_{ie}}) + \sum \delta W(\vec{f})$$

Par intégration, on obtient :

$$\Delta Ec_{/\mathcal{R}'} = Ec_{/\mathcal{R}'}(B) - Ec_{/\mathcal{R}'}(A) = W_{A\to B}(\vec{f_{ie}}) + \sum W_{A\to B}(\vec{f})$$

B.4. Énergie potentielle associée à la force d'inertie d'entraînement

Le travail élémentaire de la force d'inertie d'entraînement s'écrit :

$$\delta W(\overrightarrow{f_{ie}}) = \overrightarrow{f_{ic}}.\overrightarrow{dl}_{/\mathcal{R}'} = -m\vec{a}_e(M).\vec{V}_{/\mathcal{R}'}(M)dt = m\omega^2\overrightarrow{HM}.\left(\frac{d(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM})}{dt}\right)$$

$$\delta W(\overrightarrow{f_{ie}}) = m\omega^2\overrightarrow{HM}.\frac{d\overrightarrow{H}}{dt}_{/\mathcal{R}'} dt = m\omega^2\overrightarrow{HM}.d\overrightarrow{HM} = -d\left(-\frac{1}{2}m\omega^2 HM^2\right)$$

La force d'inertie dérive d'une énergie potentielle

$$E_{p,ie} = -\frac{1}{2}m\omega^2 HM^2 + constante$$

C. Caractère galiléen approché de quelques référentiels : référentiel de Copernic, référentiel géocentrique, référentiel terrestre.

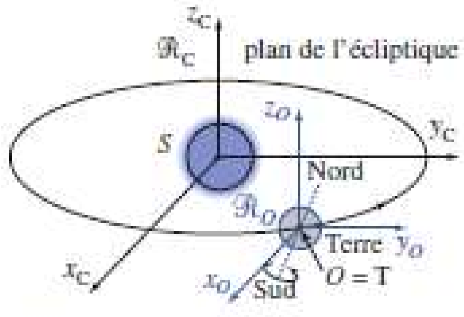
C.1. Le référentiel de Copernic

Le référentiel de Copernic, noté $\mathcal{R}_C$, est défini par la donnée du repère $(C, \vec{e}_{xC}, \vec{e}_{yC}, \vec{e}_{zC})$, où C est le centre de masse du système solaire, et les axes (CX_C), (CY_C) et (CZ_C) liés aux directions de trois étoiles suffisamment éloignés pour pouvoir être considérées comme fixes. Pour les points matériels dans le système solaire, ce référentiel est galiléen avec une excellente précision.

C.2. Le référentiel géocentrique

C.2.1 Définition

Le repère spatial lié au référentiel géocentrique $\mathcal{R}_O = \mathcal{R}_G$ a son origine au centre $O \equiv T$ de la terre, et ses axes (OX_o), (OY_o) et (OZ_o) sont respectivement parallèles à ceux du référentiel de Copernic.



Doc. 5. *Le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_O$ est en translation par rapport à $\mathcal{R}_C$.*

$\mathcal{R}_O$ décrit dans $\mathcal{R}_C$ un mouvement de translation avec une accélération $\vec{a}_{O/\mathcal{R}_C}$. Ce référentiel géocentrique n'est donc pas galiléen, puisqu'il faut faire intervenir la force d'inertie d'entrainement indépendante du point considéré car le référentiel $\mathcal{R}_O$ est en translation ($\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_{O/\mathcal{R}_C}$) dans la relation fondamentale de la dynamique exprimée dans $\mathcal{R}_O$.

C.2.2 La relation fondamentale de la dynamique en référentiel géocentrique

C.2.2.1.Accélération d'entrainement et champ de gravitation

Soit un point M de masse m. Ce point subit :

- Les forces gravitationnelles exercées par la terre, la lune, le soleil,…

Le champ crée : $\vec{g}(M) = \vec{g}_T(M) + \vec{g}_L(M) + \vec{g}_S(M) + \cdots$

En raison de la décroissance en $\frac{1}{r^2}$ de l'interaction gravitationnelle, le terme $\vec{g}_T(M)$ est prépondérant au voisinage de la terre ;

- D'éventuelles forces $\vec{F}_a$ résultant d'autres interactions matérielles avec le point M ;
- La force d'inertie d'entrainement $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_{O/\mathcal{R}_C}$.

La relation fondamentale de la dynamique dans $\mathcal{R}_O$ a pour expression :

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}_O} = \vec{F}_a + m[\vec{g}_T(M) + \vec{g}_L(M) + \vec{g}_S(M) + \cdots] - m\vec{a}_{O/\mathcal{R}_C}$$

C.2.2.2. Terme différentiel ou terme de marée

Le mouvement du centre d'inertie O de la terre peut être étudié dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_C$ en l'assimilant à un point matériel de masse M_T :

$$M_T\vec{a}_{O/\mathcal{R}_C} = M_T[\vec{g}_L(O) + \vec{g}_S(O) + \cdots]$$

En reportant dans l'équation ci-dessus, on a :

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}_O} = \vec{F}_a + m\,\vec{g}_T(M) + \mathbf{m}[(\vec{\mathbf{g}}_{\mathbf{L}}(\mathbf{M}) - \vec{\mathbf{g}}_{\mathbf{L}}(\mathbf{O})) + (\vec{\mathbf{g}}_{\mathbf{S}}(\mathbf{M}) - \vec{\mathbf{g}}_{\mathbf{S}}(\mathbf{O})) + \cdots]$$

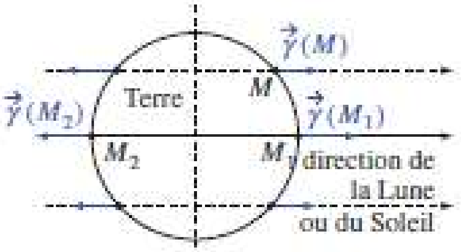
Le terme $[(\vec{\mathbf{g}}_{\mathbf{L}}(\mathbf{M}) - \vec{\mathbf{g}}_{\mathbf{L}}(\mathbf{O})) + (\vec{\mathbf{g}}_{\mathbf{S}}(\mathbf{M}) - \vec{\mathbf{g}}_{\mathbf{S}}(\mathbf{O})) + \cdots]$ est appelé accélération différentiel.

Le terme d'accélération différentiel dû à un astre A est défini par :

$$\vec{\gamma}_A = \vec{\mathbf{g}}_{\mathbf{A}}(\mathbf{M}) - \vec{\mathbf{g}}_{\mathbf{A}}(\mathbf{O})$$

$\vec{\mathbf{g}}_{\mathbf{A}}(\mathbf{O})$ et $\vec{\mathbf{g}}_{\mathbf{A}}(\mathbf{M})$ représentant les champs de gravitation de l'astre A en O et en M.

C.2.2.3.Caractère quasi-galiléen de $\mathcal{R}_O$ en domaine terrestre



Sur terre, le terme d'accélération différentiel provient essentiellement des effets de la lune et du soleil.

Pour un point matériel M de masse m au voisinage de la terre (r = OM de l'ordre de R_T), nous pouvons estimer les termes des marées.

Considérons les points M_1 et M_2 où les normes sont maximales.

Pour la lune :

$$\vec{\mathbf{g}}_{\mathbf{L}}(\boldsymbol{M_1}) - \vec{\mathbf{g}}_{\mathbf{L}}(\mathbf{O}) = [\boldsymbol{\mathcal{G}}_{\mathbf{L}}(\boldsymbol{M_1}) - \boldsymbol{\mathcal{G}}_{\mathbf{L}}(\mathbf{O})]\vec{\boldsymbol{u}}$$

$$\mathcal{G}_{\mathrm{L}}(M_1) - \mathcal{G}_{\mathrm{L}}(\mathrm{O}) = GM_L\left(\frac{1}{(TL - R_T)^2} - \frac{1}{(TL)^2}\right) = GM_L\frac{R_T(2TL - R_T)}{[TL(TL - R_T)]^2}$$

$$TL \gg R_T \Longrightarrow \mathcal{G}_{\mathrm{L}}(M_1) - \mathcal{G}_{\mathrm{L}}(\mathrm{O}) = 2GM_L\frac{R_T}{TL^3}$$

$$\mathcal{G}_{\mathrm{L}}(M_1) - \mathcal{G}_{\mathrm{L}}(\mathrm{O}) = 2g_0\frac{M_L}{M_T}\left(\frac{R_T}{TL}\right)^3 = 1{,}1.10^{-7}g_0$$

De même, pour le soleil :

$$\mathcal{G}_{\mathrm{S}}(M_1) - \mathcal{G}_{\mathrm{S}}(\mathrm{O}) = 2g_0\frac{M_S}{M_T}\left(\frac{R_T}{TS}\right)^3 = 5{,}1.10^{-8}g_0$$

Avec : $g_0 = G\frac{M_T}{{R_T}^2}$

$$M_S = 2.10^{30}kg \ ; \quad M_T = 6.10^{24}kg \ ; \ M_L = \frac{M_T}{81}$$

$$TL = 384\,000\ km = 60\ R_T \ ; \quad TS = 1{,}5.10^{11}m$$

Ces termes sont faibles et n'interviennent que dans des situations exceptionnelles (marées).

Ces résultats montrent que dans le domaine terrestre, on peut fréquemment négliger ce terme différentiel et considérer que $\mathcal{R}_O$ se comporte comme un référentiel remarquablement galiléen, à la condition expresse de ne tenir compte que du champ gravitationnel terrestre dans la relation fondamentale de la dynamique qui devient :

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}_O} = \vec{F}_a + m\vec{g}_T(M)$$

Dans le domaine terrestre, le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_O$ est remarquablement galiléen, si on néglige le terme différentiel de marée ; le seul champ gravitationnel à considérer est alors celui crée par la terre.

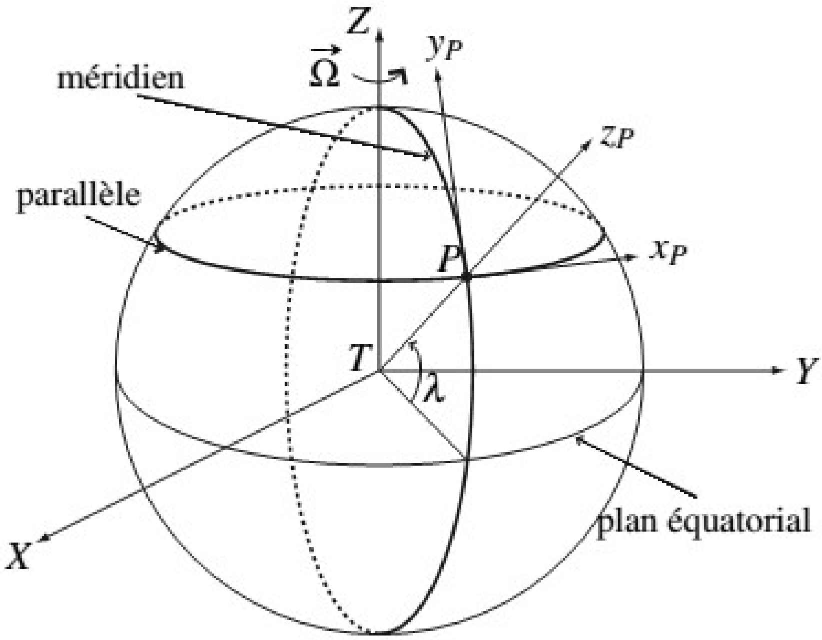
C.3. Référentiel terrestre

Le référentiel terrestre n'est pas galiléen puisque $\mathcal{R}_T$ est en rotation uniforme de période de révolution 24h autour de l'axe S/N de la terre.

L'axe TZ est choisi parallèle à l'axe de rotation de la Terre, dont le vecteur rotation est $\vec{\Omega}$. On choisit l'axe Pz_P selon la verticale locale au point P, l'axe Px_P le long du parallèle passant par P, dirigé vers l'Est, et l'axe Py_P le long du méridien passant par P, dirigé vers le Nord.

Attention, P n'appartient pas à l'axe de rotation TZ.

L'angle λ défini sur le schéma est la latitude du point P.



C.3.1. Poids et Mécanique dans le référentiel terrestre

C3.1.a. Le poids d'un corps

Le poids P est constitué de l'interaction gravitationnelle de la terre (en négligeant les termes de marée liés aux autres astres proches) et de la force d'inertie d'entrainement due au mouvement de rotation de la terre autour de l'axe des pôles. En posant
$\vec{P}(M) = m\vec{g}(M)$ où m est la masse, on définit le champ de pesanteur $\vec{g}$ en un point M par : $\vec{g}(M) = -G\frac{M_{terre}}{R_{terre}^2}\overrightarrow{e_r} + \omega^2\overrightarrow{HM}$, où H est le projeté de M sur l'axe des pôles et $G = 6{,}67.10^{-11}\ (SI)$ est la constante de gravitation.

C3.1.b. Mécanique dans le référentiel terrestre

Dans le référence terrestre, la relation fondamentale de la dynamique :

$$\boldsymbol{m\vec{a}_{/\mathcal{R}T}(M)} = \sum \vec{f} + \vec{P} + \overrightarrow{\boldsymbol{f_{ic}}}$$

où dans $\sum \vec{f}$ on décompte les forces autres que le poids $\vec{P}$.
Si l'on peut négliger la force d'inertie de Coriolis il ne reste finalement plus que

$$\boldsymbol{m\vec{a}_{/\mathcal{R}T}(M)} = \sum \vec{f} + \vec{P}$$

C.3.2.Caractère quasi-galiléen de $\mathcal{R}_T$

Le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}_T$ (en supposant le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_G$ galiléen) appliqué à un point M de masse m soumis uniquement à l'interaction gravitationnelle de la terre est :

$$m\,\vec{a}_{M/\mathcal{R}_T} = \vec{F}_{gT}(M) + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{iC}$$

- $\vec{F}_{gT}(M) = -\frac{mGM_T}{TM^3}\overrightarrow{TM}$ est la force d'interaction gravitationnelle exercée par la terre.
- $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e(M)$: force d'inertie d'entrainement
- $\vec{F}_{iC} = -m\,\vec{a}_C(M)$: force d'inertie de Coriolis.

Comme $\mathcal{R}_T$ est en rotation uniforme autour de l'axe S/N de la terre fixe dans le référentiel $\mathcal{R}_G$, on a :

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_G} = \omega\vec{e_z} \;\text{ et }\; \omega = \frac{2\pi}{24x3600} = 72,7.10^{-6}\,rad.s^{-1}$$

$$\vec{a}_e(M) = -\omega^2.\overrightarrow{HM} \;\; et \;\; \vec{a}_C = 2\,\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}_T}$$

Evaluons l'ordre de grandeur des 3 termes de $\vec{a}_{M/\mathcal{R}_T}$:

- $\frac{GM_T}{{R_T}^2} = 9,8\,m.s^{-2} = g_0$
- $\omega^2.\mathrm{HM} = \omega^2.R_T.cos\lambda$

A l'équateur $\lambda = 0$ et $\omega^2.\mathrm{HM} = \omega^2.R_T$ est maximal

$$\omega^2.\mathrm{HM}_{max} = \left(72,7.10^{-6}\right)^2 x6378.10^3 = 0,034\,m.s^{-2}$$

$$2\omega v_r = 2x72,7.10^{-6}x\frac{1000}{3.6} = 0.04m.s^{-2}$$

On a effectué le calcul ci-dessus avec une vitesse v_r = 1000 km/h.

$$\frac{\omega^2.\mathrm{HM}_{max}}{g_0} = \frac{0,034}{9,8} = 0.35\,\%$$

$$\frac{\mathbf{2\omega v_r}}{\boldsymbol{g_0}} = \frac{\mathbf{0,04}}{\mathbf{9,8}} = \mathbf{0.41}\ \%$$

On remarque que les deux termes d'entrainement $\boldsymbol{\omega^2}\mathbf{HM}$ et de Coriolis (jusqu'à v_r =700 m/s) sont négligeables devant l'interaction gravitationnelle. Ainsi pour de cas pratiques, le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ peut être considéré comme galiléen.